УДК 517.911

© **В. Я. Дерр, Д. М. Кинзебулатов**

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{T}'$

Введение

Рассмотрение обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенными функциями в пространстве обобщенных функций $\mathcal{T}'$ позволяет сделать запись уравнения корректной, и формализовать в рамках теории обобщенных функций классический подход, предполагающий учет способа приближения обобщенных функций обычными функциями.

§ 1. Обобщенные функции с динамическими основными функциями

1. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, в общем случае неограниченный, $J \doteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Обозначим через $\mathbb{F}(J)$ алгебру функций $J \to \mathbb{R}$. Назовем *динамической функцией* (д.ф.) отображение $f : I \to \mathbb{F}(J)$. Множество д.ф. $d\mathbb{F} = d\mathbb{F}(I)$ образует алгебру относительно поточечных операций. Значение $f(t)(\cdot)$ назовем *динамическим значением.* В случае, если $f(t)(\cdot)$ постоянно, назовем $f(t) \equiv f(t)(\cdot)$ *обычным значением.* Если $\mathbb{F} = \mathbb{F}(I)$ — алгебра функций $I \to \mathbb{R}$, то определено вложение $\mathbb{F} \subset d\mathbb{F}$. Определим композицию $g \in \mathbb{F}$, $f \in d\mathbb{F}$ как $(g \circ f)(t)(\cdot) = g(f(t)(s))$. Назовем $c \in \mathbb{R}$ пределом д.ф. f справа в точке τ, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что $\sup_{t\in(\tau,\tau+\eta),\ s\in J} |c - f(t)(s)| < \varepsilon$. обозначим $f(\tau+) \doteq c$ Аналогично определяется предел слева $f(\tau-)$.

Пусть $d\mathbb{G} \subset d\mathbb{F}$ — банахова алгебра д.ф., которые обладают односторонними пределами $f(t+)$, $f(t-)$, $f(t)(s+)$, $f(t)(s-)$ ($t \in I$, $s \in J$). Алгебра $d\mathbb{G}$ банахова относительно нормы $\|f\|_{d\mathbb{G}} \doteq \sup_{t\in I,\ s\in J} |f(t)(s)|$. Если $\mathbb{C} = \mathbb{C}(I)$ — банахова алгебра ограниченных непрерывных функций, то $\mathbb{C} \subset d\mathbb{G}$ [1]. Пусть $D(f) = \{t \in I : f(t)(\cdot) \not\equiv \mathrm{const}\}$. Тогда $D(f)$ не более чем счетно [1], и можем положить $\hat{f}(t) = f(t)$ на $I \setminus D(f)$. Носитель $f \in d\mathbb{G}$ определяется равенством

$$\mathrm{supp}(f) \doteq \mathrm{cl}\{t \in I : t \in D(f) \text{ или } f(t) \neq 0\}.$$

Пусть $s\mathbb{G} \subset d\mathbb{G}$ — алгебра динамических функций таких, что $f(t)(\cdot) \in \mathbb{AC}(J)$ и $f(t-) = f(t)(-1/2)$, $f(t+) = f(t)(1/2)$ ($t \in I$). Пусть $s\mathbb{BV} \subset s\mathbb{G}$ — алгебра динамических функций таких, что $\hat{f} \in \mathbb{BV}(I)$ и

$$\sum_{\tau\in D(f)} \mathrm{var}_{s\in J}(f(t)(s)) < \infty.$$

Полагаем $f \in s\mathbb{BV}_{\mathrm{loc}}$, если для каждого отрезка $[c, d] \subset I$ сужение $f|_{(c,d)} \in s\mathbb{BV}(c, d)$.

2. Определим пространство *динамических основных функций* $\mathcal{T} \doteq \{\varphi \in d\mathbb{G} : \mathrm{supp}(\varphi)$ — компакт$\}$; $\varphi_k \to \varphi$ в $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_k \to \varphi$ в $d\mathbb{G}$ и $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subset C$ ($k \in \mathbb{N}$), $C \subset I$ — компакт. Тогда $\mathcal{D} \doteq \{\varphi \in \mathbb{C} : \mathrm{supp}(\varphi)$ — компакт$\} \subset \mathcal{T}$. Пространство *обобщенных функций* $\mathcal{D}'$ ($\mathcal{T}'$) определяется как топологическое сопряженное к $\mathcal{D}$ ($\mathcal{T}$). Каждая обобщенная функция из $\mathcal{D}'$ допускает продолжение с $\mathcal{D}$ на $\mathcal{T}$ [1].

Каждая $f \in \mathbb{L}_{\mathrm{loc}}$ определяет *регулярную обобщенную функцию* $f \in \mathcal{T}'$:

$$(f, \varphi) = \int_I f(t)\hat{\varphi}(t)dt \quad (\varphi \in \mathcal{T}).$$

Дельта-функция $\delta^\alpha_\tau \in \mathcal{T}'$ определяется равенством

$$(\delta^\alpha_\tau, \varphi) = \int_J \varphi(\tau)(s)\alpha(s)ds \quad (\varphi \in \mathcal{T}),$$

где $\alpha \in \mathbb{L}(J)$, $\int_J \alpha(t)dt = 1$ — *форма* дельта-функции. Для $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем $(\delta_\tau^\alpha, \varphi) = \varphi(\tau)$, то есть δ_τ^α — продолжение классической дельта-функции с $\mathcal{D}$ на $\mathcal{T}$.

Определим произведение обобщенной функции $f \in \mathcal{T}'$ и разрывной функции $g \in d\mathbb{G}$ как

$$(gf, \varphi) = (f, g\varphi),$$

где $\varphi \in \mathcal{T}$, $g\varphi \in \mathcal{T}$, так что операция умножения коммутативна, ассоциативна и непрерывна.

Определим производную $g \in s\mathbb{BV}$ в $\mathcal{T}'$ с помощью равенства ($\varphi \in \mathcal{T}$)

$$(\dot{g}, \varphi) = \int_I \hat{\varphi}(t)d\hat{g}_c(t) + \sum_{\tau \in D(g)} \int_J \varphi(\tau)(s)(g(\tau)(s))^{\cdot}_s ds.$$

В $\mathcal{T}'$ справедлива формула Лейбница дифференцирования произведения.

Пусть $\mathbb{L}^n$, $s\mathbb{BV}^n_{\rm loc}$, $\mathcal{T}^{n\prime}$ — пространства векторно-значных (динамических, обобщенных) функций с операциями и сходимостью, определяемыми покомпонентно.

§ 2. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями

Пусть $G \subset I \times \mathbb{R}^n$ открыто. Рассмотрим начальную задачу

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)v, \quad x(t_0-) = x_0, \tag{1}$$

где $(t_0, x_0) \in G$, функция $f : G \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори по $(t,x) \in G$ и липшицева по x, функция $g : G \to \mathbb{R}^{n \times n}$ непрерывна по t и липшицева по x. *Решением* задачи (1) называется д.ф. $x \in s\mathbb{BV}^n_{\rm loc}(\Omega)$, удовлетворяющая (1) в $\mathcal{T}^{n\prime}(\Omega)$, где $\Omega \subset I$ — открытый интервал. *Обычным решением* задачи (1) называется функция $\hat{x} \in \mathbb{BV}^n_{\rm loc}(\Omega)$. Обобщенная функция $v = \dot{u} \in \mathcal{T}^{n\prime}$, $u \in s\mathbb{BV}^n_{\rm loc}$. Пусть $u(t+) - u(t-) \neq 0$ для всех $t \in D(u)$. Тогда

$$v = \dot{\hat{u}}_c + \sum_{\tau \in D(u)} \big\langle u(t+) - u(t-), \delta_\tau^{\alpha_\tau} \big\rangle,$$

где $\langle , \rangle$ — покомпонентное произведение в $\mathbb{R}^n$, $(\delta_\tau^{\alpha_\tau}, \varphi) = \big((\delta_\tau^{\alpha_\tau^i}, \varphi)\big)_{i=1}^n$, $\alpha_\tau = (\alpha_\tau^i)_{i=1}^n \in \mathbb{L}^n(J)$. Найдется $h > 0$ такое, что решение начальной задачи для (1) существует в $s\mathbb{BV}^n(t_0 - h, t_0 + h)$ и совпадает со всяким другим решением на общем интервале определения.

Если $x \in s\mathbb{BV}^n_{\rm loc}(\Omega)$ — решение, $\hat{x} \in \mathbb{BV}^n_{\rm loc}(\Omega)$ — обычное решение, то

$$\hat{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f\big(r, \hat{x}(r)\big)dr + \int_{t_0}^t g\big(r, \hat{x}(r)\big)d\hat{u}_c(r) + \\ + \sum_{\tau < t}\big(\gamma_\tau(1/2) - \hat{x}(\tau-)\big) - \sum_{\tau < t_0}\big(\gamma_\tau(1/2) - \hat{x}(\tau-)\big), \tag{2}$$

где $t \in \Omega$, $D(u) = \{\tau\} \subset \Omega$, динамическое значение $x(\tau)(\cdot) = \gamma_\tau(\cdot)$ может быть найдено из

$$\dot{\gamma}_\tau(s) = g\big(\tau, \gamma_\tau(s)\big)\big\langle u(\tau+) - u(\tau-), \alpha_\tau(s)\big\rangle, \quad \gamma_\tau(-1/2) = \hat{x}(\tau-) \tag{3}$$

где $x(\tau-) = \hat{x}(\tau-)$, $x(\tau+) = \hat{x}(\tau+) \doteq \gamma_\tau(1/2)$. Обратно, если $x \in s\mathbb{BV}^n_{\rm loc}(\Omega)$ удовлетворяет (2)(3), то x — решение начальной задачи (1).

Список литературы

1. V. Derr, D. Kinzebulatov. Distributions with dynamic test functions and multiplication by discontinuous functions // Preprint, arXiv, 2006.

Дерр Василий Яковлевич
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: vandv@udm.net

Кинзебулатов Дамир Маратович
Ижевский государственный
технический ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: dkinz@member.ams.org